

- SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
ISTITUTO MATEMATICO DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

A. BOVE

IL PROBLEMA MISTO PER OPERATORI ELLITTICI DEL SECONDO ORDINE

18 MARZO 1982

Il problema misto per operatori ellittici è stato trattato da molti autori; per una bibliografia abbastanza completa e aggiornata fino al 1978 rimandiamo a [1] e [2]. Dopo tale data segnaliamo una serie di lavori di A. Pryde (si veda ad es. [5] e la bibliografia ivi contenuta), in cui si danno condizioni necessarie e sufficienti di fredholmicità per tali problemi in spazi del tipo di Beppo Levi.

La presente introduzione è ispirata a [1], [3] e [4].

1. PROBLEMA MISTO PER OPERATORI ELLITTICI A COEFFICIENTI COSTANTI

Sia dato il problema

$$(1.1) \quad \begin{cases} \Delta u - u = 0, & \text{in } R_+^n, \\ D_n u|_{x_n} = g_1, & \text{se } x_{n-1} > 0, \\ u|_{x_n} = 0 = g_2, & \text{se } x_{n-1} < 0. \end{cases}$$

dove g_1 e g_2 sono distribuzioni assegnate.

Per risolvere (1.1) consideriamo il seguente problema di Dirichlet:

$$(1.2) \quad \begin{cases} \Delta u - u = 0, & \text{in } R_+^n, \\ u|_{x_n=0} = \phi \end{cases}$$

dove ϕ è una opportuna distribuzione. La soluzione di (1.2) è data da

$$(1.3) \quad u(x) = \int e^{ix' \cdot \xi'} e^{x_n \sqrt{1+|\xi'|^2}} \hat{\phi}(\xi') d\xi'$$

$(x' = (x_1, \dots, x_{n-1}) = (x'', x_{n-1}), d\xi' = (2\pi)^{-n+1} d\xi'$ e $\hat{\cdot}$ denota la trasformata di Fourier). Considerando ϕ come incognita imponiamo che (1.3) soddisfi le condizioni al contorno di (1.1); otteniamo

$$(1.4)_+ \quad \int e^{ix' \cdot \xi'} (i\sqrt{1+|\xi'|^2}) \hat{\phi}(\xi') d\xi' = g_1(x'), \text{ se } x_{n-1} > 0,$$

$$(1.4)_- \quad \phi(x') = g_2(x'), \quad \text{se } x_{n-1} < 0.$$

Indichiamo con lg_1 e lg_2 due prolungamenti di g_1 e g_2 rispettivamente. Poniamo

$$(1.5) \quad \begin{cases} \phi_-(x') = lg_1(x') - i\sqrt{1+|D'|^2} \phi(x') \\ \phi_+(x') = lg_2(x') - \phi(x') \end{cases}$$

Per definizione $\text{supp } \phi_{\pm} \subset \overline{R_+^n}$; prendendo la trasformata di Fourier di (1.5) otteniamo

$$(1.6) \quad \begin{cases} i\sqrt{1+|\xi'|^2} \hat{\phi}(\xi') + \hat{\phi}_-(\xi') = \widehat{lg_1}(\xi') \\ \hat{\phi}(\xi') + \hat{\phi}_+(\xi') = \widehat{lg_2}(\xi') \end{cases}$$

Osserviamo che, per definizione, $\hat{\phi}_-(\xi')$ è prolungabile analiticamente rispetto a ξ_{n-1} nel semipiano $\text{Im } \xi_{n-1} > 0$, mentre $\hat{\phi}_+(\xi')$ è prolungabile analiticamente nel semipiano $\text{Im } \xi_{n-1} < 0$. Da (1.6), eliminando $\hat{\phi}$, ricaviamo

$$(1.7) \quad i\sqrt{1+|\xi'|^2} \hat{\phi}_+(\xi') - \hat{\phi}_-(\xi') = i\sqrt{1+|\xi'|^2} \widehat{lg_2}(\xi') - \widehat{lg_1}(\xi').$$

Ora

$$(1.8) \quad i\sqrt{1+|\xi'|^2} = i(\xi_{n-1} - i(1+|\xi''|^2)^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} \cdot (\xi_{n-1} + i(1+|\xi''|^2)^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = b_-(\xi') b_+(\xi'),$$

ove b_{\pm} è il simbolo d'un operatore pseudodifferenziale prolungabile analiticamente nel semipiano $\pm \operatorname{Im} \xi_{n-1} > 0$ (si è p. es. scelta quella determinazione della radice che è positiva sulla semiretta positiva).

Da (1.8) ricaviamo

$$(1.9) \quad b_-(\xi') \hat{\phi}_+(\xi') - \frac{\hat{\phi}_-(\xi')}{b_+(\xi')} = b_-(\xi') \widehat{1g}_2(\xi') - \frac{\widehat{1g}_1(\xi')}{b_+(\xi')}.$$

Dunque il problema (1.1) è ricondotto a risolvere il problema (di Hilbert) (1.9). È ben noto che tale problema è sempre univocamente risolubile in termini di spazi di Sobolev se il secondo membro sta in $H_{\delta}(R^{n-1})$, con $|\delta| < \frac{1}{2}$. Supponiamo di cercare una soluzione u di (1.1) in $H_s(R_+^n)$ ($s > 3/2$); allora $\phi_- \in H^{s-3/2}(R^{n-1})$, $\phi_+ \in H^{s-\frac{1}{2}}(R^{n-1})$, mentre il primo (secondo) membro della (1.9) sarebbe un elemento di $H^{s-1}(R^{n-1})$. Dunque la richiesta $s > 3/2$ non è compatibile con la condizione $|s-1| < \frac{1}{2}$, ossia $\frac{1}{2} < s < 3/2$.

Definiamo ora gli spazi in cui, nel caso generale, si va a risolvere il problema misto; per comodità e per ragioni che verranno chiarire più oltre, consideriamo il caso in cui sia l'operatore in esame, sia gli spazi dipendono da un parametro complesso q . Si intenderà che tutte le costanti che interverranno saranno indipendenti dal parametro q , ame nonché non venga esplicitamente stabilito il contrario.

Definizione 1.1. Sia $q \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $s, l, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Allora

$u \in H_{s,-1,1}(R^n)$ se e solo se

$$[u]_{s,-1,1}^2 = \int (|q|^2 + |\xi|^2)^s (|q|^2 + |\xi'|^2)^{-1} \\ (|q|^2 + |\xi''|^2)^1 |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi < +\infty.$$

Inoltre $g \in H_{\alpha,\beta}(R^{n-1})$ se e solo se

$$[g]_{\alpha,\beta}^2 = \int (|q|^2 + |\xi'|^2)^\alpha (|q|^2 + |\xi''|^2)^\beta |\hat{g}(\xi')|^2 d\xi' < +\infty.$$

Gli spazi $H_{s,-1,1}(R_+^n)$, $H_{\alpha,\beta}(R_\pm^{n-1})$ si definiscono per passaggio al quoziente, come al solito.

Osserviamo che $H_s \subset H_{s,-1,1}$ e che, poiché

$$(|q|^2 + |\xi|^2)^s \left(\frac{|q|^2 + |\xi''|^2}{|q|^2 + |\xi'|^2} \right)^1 \geq |q|^2 + |\xi''|^{2s} + |\xi_{n-1}|^{2(s-1)} + |\xi_n|^{2(s-1)},$$

se s e 1 sono interi $u \in H_{s,-1,1}(R^n) \Rightarrow u \in L^2$, $D_{x_n}^s u \in L^2$, $D_{n-1}^{s-1} u$ e $D_n^{s-1} u \in L^2$. Ciò mira a dar conto del fatto che (p. es. nel problema (1.1)) la regolarità della soluzione viene a mancare nella direzione x_n e nella direzione x_{n-1} (direzione di attraversamento della superficie di discontinuità $x_n = x_{n-1} = 0$). Le principali proprietà di questi spazi sono elencate nella

Proposizione 1.2. i) Sia $s > \frac{1}{2}$, $u \in H_{s,-1,1}(R^n)$, γ_0 l'operatore di traccia nell'iperpiano $x_n = 0$; allora

$$[\gamma_0 u]_{s-1-\frac{1}{2},1} \leq C [u]_{s,-1,1}.$$

ii) Sia $\phi \in C_0^\infty(R^n)$, allora

$$[\phi u]_{s,-1,1} \leq \max_{x \in \mathbb{R}^n} |\phi(x)| [u]_{s,-1,1} + C_\phi [u]_{s,-1,1-1}.$$

iii) Se P è un operatore differenziale di ordine m , allora

$$[Pu]_{s-m,-1,1} \leq C[u]_{s,-1,1}.$$

Consideriamo ora, per $q \in \mathbb{C}; |\arg z| < \pi/4$ il seguente problema al contorno:

$$(1.10) \quad \begin{cases} A(q, D_x) u = f, & \text{in } \mathbb{R}_+^n, \\ B_1(q, D_x) u|_{x_n=0} = g_1, & \text{in } \mathbb{R}_+^{n-1}, \\ B_2(q, D_x) u|_{x_n=0} = g_2, & \text{in } \mathbb{R}_-^{n-1}, \end{cases}$$

dove $A(q, \xi)$ è un polinomio propriamente ellittico omogeneo del secondo ordine rispetto alle variabili (q, ξ) , $B_i(q, \xi)$ è un polinomio omogeneo di ordine m_i rispetto a (q, ξ) , $i = 1, 2$.

Premettiamo alcuni fatti. Denotiamo con π^+ l'operatore definito da $\pi^+ \hat{u} = \hat{v}$ se $v = H(x_n)u$, ove $H(x_n)$ è la funzione di Heaviside. Si ha

$$\pi^+ \hat{u}(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{1}{\xi_n + i0 - \eta_n} \hat{u}(\xi', \eta_n) d\eta_n.$$

Indichiamo con π' l'operatore definito da

$$\pi'(\hat{u}(\xi)) = \hat{v}(\xi'), \quad \text{ove } v(x') = \gamma_0(u(x)).$$

Supponiamo in un primo tempo $f \equiv 0$ in (1.10). Sia lg_i un prolungamento di g_i a tutto \mathbb{R}^{n-1} , $i = 1, 2$. Poniamo

$$(1.11) \quad \begin{cases} B_1(q, d_x) u|_{x_n=0} = \lg_1(x') + v_-(q, x') \\ B_2(q, d_x) u|_{x_n=0} = \lg_2(x') + v_+(q, x'). \end{cases}$$

Prendendo la trasformata di Fourier di (1.10) e (1.11) otteniamo

$$(1.12) \quad \begin{cases} \pi^+ A(q, \xi) \hat{u}(\xi) = 0 \\ \pi^+ \pi^+ B_1(q, \xi) \hat{u}(\xi) = \widehat{\lg_1}(\xi') + \hat{v}_-(q, \xi') \\ \pi^+ \pi^+ B_2(q, \xi) \hat{u}(\xi) = \widehat{\lg_2}(\xi') + \hat{v}_+(q, \xi'). \end{cases}$$

Definizione 1.3. Sia $A(q, \xi)$ un simbolo omogeneo tale che $A(q, \xi) \neq 0$ se $|q| + |\xi| \neq 0$. Diciamo che $A(q, \xi)$ ammette la fattorizzazione omogenea $A(q, \xi) = A_+(q, \xi) A_-(q, \xi)$, se A_+ e A_- verificano le

- a) A_{\pm} ammette prolungamento analitico nel semipiano $\pm \operatorname{Im} \xi_n > 0$.
- b) A_{\pm} è una funzione continua di $(q, \xi', \operatorname{Re} \xi_n, \operatorname{Im} \xi_n)$ per $\pm \operatorname{Im} \xi_n \geq 0$, se $|q| + |\xi'| + |\operatorname{Re} \xi_n| + |\operatorname{Im} \xi_n| > 0$.
- c) $A_{\pm}(q, \xi', \operatorname{Re} \xi_n, \operatorname{Im} \xi_n) \neq 0$ se $|q| + |\xi'| + |\operatorname{Re} \xi_n| + |\operatorname{Im} \xi_n| > 0$, per $\pm \operatorname{Im} \xi_n \geq 0$.
- d) A_{\pm} è una funzione omogenea di $(q, \xi', \operatorname{Re} \xi_n, \operatorname{Im} \xi_n)$.

Si ha il

Teorema 1.4. Sia $A(q, \xi)$ come nella Def. 1.3; allora A ammette una fattorizzazione omogenea.

Dunque

$$A(q, \xi) = A_+(q, \xi) A_-(q, \xi),$$

con $\text{ord } A_{\pm} = 1$. Dalla prima di (1.12) si ottiene che

$$(1.13) \quad \hat{u}(\xi) = A_+^{-1}(q, \xi) \phi(q, \xi').$$

Sostituendo nella seconda e terza equazione di (1.12) si ha

$$(1.14) \quad \begin{cases} b_1(q, \xi') \phi(q, \xi') = \widehat{1g}_1(\xi') + \hat{v}_-(q, \xi') \\ b_2(q, \xi') \phi(q, \xi') = \widehat{1g}_2(\xi') + \hat{v}_+(q, \xi'), \end{cases}$$

$$\text{ove } b_i(q, \xi') = \pi' \pi^+ \frac{B_i(q, \xi)}{A_+(q, \xi)}.$$

Facciamo ora la seguente

Ipotesi (condizione di Šapiro-Lopatinskii)

$$\begin{aligned} b_i(q, \xi') &\neq 0 \quad \forall \xi' \in \mathbb{R}^n, q \in \{z \in \mathbb{C}; |\arg z| < \pi/4\}, \\ |\xi'| + |q| &\neq 0, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Per il Teor. 1.4 si ha

$$(1.15) \quad b_i(q, \xi') = b_i^+(q, \xi') b_i^-(q, \xi'), \quad i = 1, 2.$$

Sia $\kappa_1 = \text{ord } b_1^-$, $\kappa_2 = \text{ord } b_2^+$, $\kappa = \kappa_1 + \kappa_2$; κ viene detto "indice della fattorizzazione".

Eliminando ϕ dalla (1.14) otteniamo il problema

$$(1.16) \quad b_2^+(b_1^+)^{-1} \hat{v}_- - b_1^-(b_2^-)^{-1} \hat{v}_+ = b_1^-(b_2^-)^{-1} \widehat{1g}_2 - b_2^+(b_1^+)^{-1} \widehat{1g}_1.$$

Ora se $g_1 \in H_{s-1-m_1-\frac{1}{2},1}^{(R_+^{n-1})}$, $g_2 \in H_{s-1-m_2-\frac{1}{2},1}^{(R_-^{n-1})}$, il secondo membro della (1.16) sta in $H_{s-1-\frac{1}{2}-x,1}^{(R_+^{n-1})}$; dunque (1.16) ammette una soluzione unica per ogni termine noto se s e l sono tali che

$$1) s > \max\{m_1 + \frac{1}{2}, m_2 + \frac{1}{2}\}$$

$$2) |s-1-\frac{1}{2}-x| = |\delta| < \frac{1}{2}.$$

Da (1.16) si ricava allora che

$$(1.17) \quad \hat{u}(\xi) = \frac{1}{A_+ b_2^+ b_1^-} \left(\pi^- \frac{b_1^-}{b_2^-} \widehat{1g_2} - \pi^+ \frac{b_2^+}{b_1^+} \widehat{1g_1} \right).$$

Utilizzando la (1.17) è facile provare che valgono le stime

$$[u]_{s,-1,1} \leq C([g_1]_{s-1-m_1-\frac{1}{2},1} + [g_2]_{s-1-m_2-\frac{1}{2},1}).$$

Se ora si considera (1.10) nel caso in cui $f \neq 0$ e $f \in H_{s-2,-1,1}^{(R_+^n)}$, basta porre $u = u_0 + w$. Se

$$u_0(x) = e^{ix \cdot \xi} A_+^{-1}(q, \xi) \pi^+(A_-^{-1}(q, \xi) \widehat{1f}(\xi)) d\xi$$

($1f$ è un prolungamento di f a tutto R^n , $1f \in H_{s-2,-1,1}^{(R^n)}$), si ottiene che w è soluzione d'un problema di cui $f \equiv 0$; per w valgono quindi formule del tipo (1.17). Si è così provato il seguente

Teorema 1.5. Sia A un operatore ellittico nel senso della

Def. 1.3; sia soddisfatta la condizione di Sapiro-Lopatinskii. Allora

$\forall f \in H_{s-2,-1,1}^{(R_+^n)}$, $g_1 \in H_{s-m_1-1-\frac{1}{2},1}^{(R_+^{n-1})}$, $g_2 \in H_{s-m_2-1-\frac{1}{2},1}^{(R_-^{n-1})}$, purché s, l siano tali che $s > \max\{m_1 + \frac{1}{2}, m_2 + \frac{1}{2}\}$, $|s-1-\frac{1}{2}-x| < \frac{1}{2}$, esiste una e una sola soluzione del problema (1.10) e inoltre si ha

$$(1.18) \quad [u]_{s,-1,1} \leq C([f]_{s-2,-1,1} + [g_1]_{s-1-m_1-\frac{1}{2},1} + [g_2]_{s-1-m_2-\frac{1}{2},1}).$$

2. IL CASO DEI COEFFICIENTI VARIABILI IN UN APERTO LIMITATO

Sia Ω un aperto limitato di \mathbb{R}^n con frontiera regolare Γ ; supponiamo cioè Γ una varietà C^∞ $(n-1)$ -dimensionale tale che Ω stia sempre localmente da una sola parte di Γ . Sia $\{V_j; j = 1, \dots, m\}$ un ricoprimento aperto di $\overline{\Omega}$ in \mathbb{R}^n e sia $\{\phi_j; j = 1, \dots, m\}$ una partizione dell'unità di classe C_0^∞ subordinata a quel ricoprimento. Sia $U_j = \text{supp } \phi_j$, $j = 1, \dots, m$. Ancora sia ω una sottovarietà di codimensione 1 di Γ , di classe C^∞ , che divide Γ in due parti, Γ^+ e Γ^- , tali che $\omega = \overline{\Gamma^+} \cap \overline{\Gamma^-}$. Sia W un intorno aperto di ω in $\overline{\Omega}$.

Introduciamo in U_j un sistema locale di coordinate che soddisfi le seguenti condizioni:

- Se $U_j \cap \Gamma = \emptyset$ il sistema di coordinate è quello naturale;
- Sia $U_j \cap \Gamma \neq \emptyset$; non è restrittivo supporre che U_j sia interamente contenuto in qualche V_k ; scegliamo allora un sistema di coordinate h_j tale che $h_j(U_j \cap \Gamma) = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ e che conservi la distanza da Γ ;
- Sia $U_j \cap \omega \neq \emptyset$; allora dovrà valere la richiesta in b) e in più dovrà essere $h_j(U_j \cap \omega) = \mathbb{R}^{n-2} \times \{0, 0\}$ e h_j dovrà conservare la distanza da ω lungo Γ .

Siano ora $s, l: \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni continue. Scegliamo $x_j \in U_j$ in modo tale che

- se $U_j \cap \Gamma \neq \emptyset$, allora $x_j \in \Gamma$;
- se $U_j \cap \omega \neq \emptyset$, allora $x_j \in \omega$;
- se $U_j \not\subset W$, ma $U_j \cap W \neq \emptyset$, allora $x_j \in W$.

Poniamo $s_j = s(x_j)$, $l_j = l(x_j)$.

Diremo che $u \in H_{(s, -1, 1)}(\Omega)$ se

$$\|u\|_{(s, -1, 1)}^2 = \sum_{j=1}^m [(\phi_j u) \circ h_j^{-1}]_{s_j, -1_j, 1_j}^2 < +\infty,$$

dove le norme a secondo membro si intendono prese su \mathbb{R}^n o \mathbb{R}_+^n a seconda

che $\text{supp } \phi_j \cap \Gamma$ sia vuoto o no. In modo analogo si introducono gli spazi di bordo $H_{\alpha,\beta}(\Gamma^\pm)$.

Osservazione. La regolarità variabile di questo tipo di spazi serve a dar conto del fatto che, lontano da ω , la soluzione è regolare se i dati sono regolari, mentre, vicino a ω , non si può ottenere più di una certa regolarità.

Consideriamo ora il problema

$$(2.1) \quad \begin{cases} A(x,q,D_x) u = f & , \quad \text{in } \Omega , \\ B_1(x,q,D_x) u|_\Gamma = g_1 & , \quad \text{in } \Gamma^+ , \\ B_2(x,q,D_x) u|_\Gamma = g_2 & , \quad \text{in } \Gamma^- , \end{cases}$$

dove A, B_i sono operatori differenziali di ordine 2, m_i , rispettivamente, $i = 1, 2$, con coefficienti di classe $C^\infty(\bar{\Omega})$. Supponiamo che

$$(2.2) \quad \overset{\circ}{A}(x,q,\xi) \neq 0 \quad \forall x,q,\xi \text{ tali che } |q| + |\xi| > 0.$$

($\overset{\circ}{A}$ denota la parte principale di A).

(2.3) In ciascun sistema locale di coordinate

$$b_i(x,q,\xi') = \pi^+ \pi^+ \frac{\overset{\circ}{B}_i(x,q,\xi)}{\overset{\circ}{A}_+(x,q,\xi)} \neq 0, \quad \text{per } x \in \Gamma,$$

$\xi \in \mathbb{R}^n$, $|q| + |\xi'| > 0$, ove $\overset{\circ}{A} = A_+ A_-$ è la fattorizzazione omogenea di $\overset{\circ}{A}$.

Per (2.3), $\forall x \in \Gamma$ fissato si ha

$$(2.4) \quad b_i(x,q,\xi') = b_i^+(x,q,\xi') b_i^-(x,q,\xi'), \quad i = 1, 2.$$

Poniamo $\kappa_1(x) = \text{ord } b_1^-(x, \cdot, \cdot)$, $\kappa_2(x) = \text{ord } b_2^+(x, \cdot, \cdot)$
 $\kappa(x) = \kappa_1(x) + \kappa_2(x)$. Per [6] si ha che $\kappa(x)$ è continua in x . Sia κ_0 una
 funzione continua tale che

$$\sup_{x \in \omega} |\kappa_0(x) - \kappa(x)| < \frac{1}{2}.$$

Poniamo $\kappa_0(x) = \kappa(x) + \delta(x)$, con $|\delta(x)| < \frac{1}{2}$. Siano
 $s, l: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, $l \geq 0$ funzioni continue tali che

$$(2.5) \quad s(x) = \kappa_0(x) + l(x) + \frac{1}{2} \geq \max\{m_1 + \frac{1}{2}, m_2 + \frac{1}{2}\}.$$

Facciamo ora la seguente ipotesi

$$(2.6) \quad |s_j - s_k| < 1/4, \quad |l_j - l_k| < 1/4, \quad j, k = 1, \dots, m.$$

Si ha il

Teorema 2.1. Valgano le ipotesi (2.2) e (2.3) e siano le funzioni s, l definite da (2.5). Allora esiste $q_0 > 0$ tale che se
 $f \in H_{(s-2, -1, 1)}(\Omega)$, $g_1 \in H_{(s-1-m_1-\frac{1}{2}, 1)}(\Gamma^+)$, $g_2 \in H_{(s-1-m_2-\frac{1}{2}, 1)}(\Gamma^-)$, il
 problema (2.1) ammette una unica soluzione $u \in H_{(s, -1, 1)}(\bar{\Omega})$ purché
 $|q| > q_0$. Inoltre vale la stima a priori

$$(2.7) \quad \|u\|_{(s, -1, 1)} \leq C(\|f\|_{(s-2, -1, 1)} + \|g_1\|_{(s-1-m_1-\frac{1}{2}, 1)} + \\
+ \|g_2\|_{(s-1-m_2-\frac{1}{2}, 1)}).$$

Dimostrazione. Sia $\psi_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tale che $\psi_j(x) \equiv 1$ in un intorno

di U_j , sicché $\psi_j \phi_j = \phi_j$, e tale che se $U_k \cap U_j \neq \emptyset$ allora $\psi_j \phi_k = \phi_k$. Proviamo la (2.7). Sia j tale che $U_j \cap \omega \neq \emptyset$. Dalla prima delle (2.1) abbiamo che $\phi_j A \psi_j u = \phi_j f$. Se il supporto di ψ_j è sufficientemente piccolo, esiste un operatore differenziale A_j , definito in tutto R^n , tale che $\phi_j A \psi_j u = \phi_j A_j \psi_j u$, e i suoi coefficienti varino di poco; infatti se $c \in C_0^\infty(R^n)$ e $c \psi_j = \psi_j$, $0 \leq c \leq 1$, basta porre $A_j(x, q, D_x) = c(x) A(x, q, D_x) + (1 - c(x)) A(x_j, q, D_x)$. Possiamo inoltre supporre che, nel nostro sistema di coordinate locali, $x_j = 0$. Si ha

$$A_j \phi_j u = \phi_j A_j \psi_j u + A_{1j} \psi_j u,$$

dove ord $A_{1j} \leq 1$. Da ciò

$$A_j \phi_j u = \phi_j f + A_{1j} \psi_j u.$$

Dunque

$$\begin{aligned} \hat{A}_j(o, q, D_x) \phi_j u &= \phi_j f + A_{1j} \psi_j u + (\hat{A}_j(x, q, D_x) - \hat{A}_j(x, q, D_x)) \phi_j u \\ &\quad + (\hat{A}_j(o, q, D_x) - \hat{A}_j(x, q, D_x)) \phi_j u, \end{aligned}$$

ossia

$$(2.8) \quad \hat{A}_j(o, q, D_x) \phi_j u = \phi_j f + A_{1j} \psi_j u + A_{2j} \phi_j u + A_{3j} \phi_j u = \phi_j,$$

dove ord $A_{2j} \leq 1$ e l'operatore A_{3j} ha coefficienti "piccoli".

Analogamente

$$\begin{aligned} (2.9) \quad \hat{B}_{1j}(o, q, D_x) \phi_j u|_{x_n=0} &= (\phi_j g_1 + Q_{1j} \psi_j u + Q_{2j} \phi_j u + \\ &\quad + Q_{3j} \phi_j u)|_{x_n=0} = \psi_{1j} \end{aligned}$$

$$(2.10) \quad \tilde{B}_{2j}(o, q, D_x) \phi_j u|_{x_n=0} = (\phi_j g_2 + P_{1j} \psi_j u + P_{2j} \phi_j u + \\ + P_{3j} \phi_j u)|_{x_n=0} = \psi_{2j}$$

dove $\text{ord } Q_{1j} = \text{ord } Q_{2j} = m_1 - 1$, $\text{ord } P_{1j} = \text{ord } P_{2j} = m_2 - 1$ e Q_{3j} e P_{3j} hanno coefficienti "piccoli". Per (2.8)-(2.10) abbiamo la stima

$$(2.11) \quad [\phi_j u]_{s_j-1, j, 1_j} \leq C([\phi_j]_{s_j-2, -1, j, 1_j} + [\psi_{1j}]_{s_j-1, j-m_1-\frac{1}{2}, 1_j} + \\ + [\psi_{2j}]_{s_j-1, j-m_2-\frac{1}{2}, 1_j}) .$$

Ora si ha

$$[\phi_j]_{s_j-2, -1, j, 1_j} \leq C([\phi_j f]_{s_j-2, -1, j, 1_j} + [\psi_j u]_{s_j-1, -1, j, 1_j} + \\ + [\phi_j u]_{s_j-1, -1, j, 1_j} + \epsilon[\phi_j u]_{s_j, -1, j, 1_j} + [\phi_j u]_{s_j, -1, j, 1_j-1}) \leq \\ \leq C([\phi_j f]_{s_j-2, -1, j, 1_j} + [\psi_j u]_{s_j-1, -1, j, 1_j} + \\ + (\epsilon + \frac{1}{|q|}) [\phi_j u]_{s_j, -1, j, 1_j}) ,$$

purché il supporto di ψ_j sia sufficientemente piccolo. Ora

$$[\psi_j u]_{s_j-1, -1, j, 1_j} \leq \sum_{k=1}^m [\phi_k \psi_j u]_{s_j-1, -1, j, 1_j} .$$

Supponiamo k tale che $V_j \cap U_k \neq \emptyset$. Sia $s_j = s_k + \delta$, $1_j = 1_k + \delta'$, ove $\max\{|\delta|, |\delta'|\} < 1/4$, per la (2.6). Se $\delta' > 0$, si ha

$$\begin{aligned}
[\phi_k \psi_j u]_{s_j-1, -1_j, 1_j} &= [\phi_k \psi_j u]_{s_k-1+\delta, -1_k-\delta', 1_k+\delta'} \leq \\
&\leq [\phi_k \psi_j u]_{s_k-1+\delta, -1_k, 1_k} \leq \frac{C}{|q|^{1-\delta}} [\phi_k u]_{s_k, -1_k, 1_k}.
\end{aligned}$$

Se $\delta' < 0$, si ha

$$\begin{aligned}
[\phi_k \psi_j u]_{s_j-1, -1_j, 1_j} &= [\phi_k \psi_j u]_{s_k-1+\delta, -1_k-\delta', 1_k+\delta'} \leq \\
&\leq [\phi_k \psi_j u]_{s_k-1+\delta, -1_k-\delta', 1_k} \leq [\phi_k \psi_j u]_{s_k-1+\delta-\delta', -1_k, 1_k} \leq \\
&\leq \frac{C}{|q|^{1-\delta+\delta'}} [\phi_k u]_{s_k, -1_k, 1_k}.
\end{aligned}$$

Dunque

$$\begin{aligned}
[\phi_j]_{s_j-2, -1_j, 1_j} &\leq C([\phi_j f]_{s_j-2, -1_j, 1_j} + \frac{1}{|q|^\alpha} \sum_{k=1}^m [\phi_k u]_{s_k, -1_k, 1_k} + \\
&+ (\varepsilon + \frac{1}{|q|}) [\phi_j u]_{s_j, -1_j, 1_j}) \quad (\alpha > 0).
\end{aligned}$$

Analoghe stime si ottengono per ψ_{1j}, ψ_{2j} . Sommando in j si ottiene la (2.7), purché la partizione dell'unità sia sufficientemente fine e q abbastanza grande.

Proviamo ora l'esistenza d'una soluzione. Denotiamo con A l'operatore costituito dai primi membri delle equazioni in (2.1). Conveniamo di denotare con ϕ A l'operatore che otteniamo

- i) moltiplicando per ϕ l'equazione differenziale in (2.1),
- ii) moltiplicando per $\gamma_0 \phi$ le condizioni al contorno in (2.1).

Consideriamo l'operatore $\psi_j A \phi_j$ e scriviamolo nelle coordina-

te locali di U_j : $\psi_j' A' \phi_j'$. Sia $\overset{\circ}{A}'$ la parte principale di A_j si ha

$$\psi_j' A' \phi_j' = \phi_j' (\overset{\circ}{A}'(o) + K_j' + T_j') \phi_j' ,$$

dove $\overset{\circ}{A}'(o)$ è $\overset{\circ}{A}'$ con i coefficienti congelati nell'origine,

$K_j' = \psi_j' (\overset{\circ}{A}' - \overset{\circ}{A}'(o))$, $T_j' = \psi_j' (A' - \overset{\circ}{A}')$. Osserviamo che $\overset{\circ}{A}'(o)$ è a coefficienti costanti, mentre K_j' , T_j' possono essere pensati come operatori definiti su R^n . Per quanto si è provato al § 1, $\overset{\circ}{A}'(o)$ ha un inverso R_{oj}' ; se q è abbastanza grande e $\text{supp } \phi_j$ abbastanza piccolo possiamo far sì che $\|K_j'\| \leq (2 \|R_{oj}'\|)^{-1}$, dove $\|\cdot\|$ denota la norma degli operatori tra gli spazi in cui operano. Allora $I + K_j' R_{oj}'$ ha inverso. Se $R_j' = R_{oj}' (I + K_j' R_{oj}')^{-1}$, R_j' è l'inverso di $\overset{\circ}{A}'(o) + K_j'$. Sia $A_j' = \overset{\circ}{A}'(o) + K_j' + T_j'$; si ha

$$R_j' A_j' = I + R_j' T_j' , \quad A_j' R_j' = I + T_j' R_j' .$$

Denotiamo con R_j l'operatore ottenuto scrivendo $\psi_j' R_j' \phi_j'$ nelle variabili originali. Poniamo $R = \sum_{j=1}^m \psi_j R_j \phi_j$. Proviamo che, se $|q|$ è grande, RA ha un inverso. Infatti nel j -esimo sistema locale di coordinate otteniamo

$$\begin{aligned} \psi_j' R_j' \phi_j' A' \psi_j' &= \psi_j' R_j' A_j' \phi_j' + \psi_j' R_j' \phi_j' , \quad A_j' \psi_j' = \\ &= \phi_j' I + \psi_j' M_j' \psi_j' , \end{aligned}$$

ove M_j' è un operatore di ordine -1 . Dunque

$$R A u = u + \sum_{j=1}^m \psi_j M_j \psi_j u .$$

Ora, se $|q|$ è grande, la norma di quest'ultimo operatore è piccola, quindi RA ha inverso $(RA)^{-1}$, sicché $(RA)^{-1} R$ è un inverso a si-

nistra di A . Analogamente si prova che $A R$ ha inverso. Ciò fornisce l'esi
stenza d'una soluzione.

L'unicità segue da (2.7).

BIBLIOGRAFIA

- [1] G. ESKIN: Boundary value problems for elliptic pseudodifferential operators, Nauka, Mosca, 1973.
- [2] ———: General mixed boundary problems for elliptic differential equations, 33-72, in CIME, Bressanone, 16/6-24/6. 1977.
- [3] A.G. GJUL'MISARJAN: General discontinuous boundary value problems...
Izv. Akad. Nauk Armjan. SSR Ser. Mat. 2 (1967), 218-234.
- [4] ———: On general discontinuous boundary value problems...
Izv. Akad. nauk Armjan. SSR Ser. Mat. 5 (1970), 3-31.
- [5] A.J. PRYDE: Second order elliptic equations with mixed boundary conditions, preprint.
- [6] M.J. VISIK, G.J. ESKIN: Equations in convolution is a bounded region.
Uspchi Mat. Nauk, 20 (3) (1965), 89-152.